

20. (a) Evaluate $\int_C \frac{z^3 dz}{(2z+i)^3}$ where C is the circle $|z|=1$

$\int_C \frac{z^3 dz}{(2z+i)^3}$ ஐ மதிப்பிடு, C என்பது வட்டம் $|z|=1$

- (b) Evaluate $\int_C \frac{(e^z + z \sinh z) dz}{(z - \pi i)^2}$ where C is the circle $|z|=4$

$\int_C \frac{(e^z + z \sinh z) dz}{(z - \pi i)^2}$ ஐ மதிப்பிடு C என்பது வட்டம் $|z|=4$



APRIL/MAY 2024

CMA53 — COMPLEX ANALYSIS- I

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Find the conjugate of $\frac{1+2i}{1-(1-i)^2}$

$\frac{1+2i}{1-(1-i)^2}$ இணைவை கண்டுபிடிக்கவும்

2. Prove that $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2} = 4$

$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2} = 4$ நிரூபி

3. Verify C - R equations for the function $f(z) = z^3$

$f(z) = z^3$ -ன் செயல்பாட்டிற்கான C - R சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்க

4. Prove that $f(z) = \operatorname{Re} z$ is nowhere differentiable
 $f(z) = \operatorname{Re} z$ - ஐ எங்கும் வேறுபடுத்த முடியாத என நிரூபி
5. Define conjugate harmonic function.
 இணைந்த ஹார்மோனிக் செயல்பாட்டை வரையறுக்கவும்
6. Prove that the function is harmonic $u = e^x \cos y$
 $u = e^x \cos y$ செயல்பாடு இணக்கமானது என்பதை நிரூபிக்க
7. Prove that the transformation $w = \bar{z}$ is not a bilinear transformation.
 $w = \bar{z}$ உருமாற்றம் ஒரு இருமுனை மாற்றம் அல்ல என்பதை நிரூபிக்க
8. Define Bilinear transformation.
 பைலினியர் மாற்றத்தை வரையறுக்க.
9. State cauchy's integral formula.
 Cauchy-ன் தொகைக்கெழு சூத்திரம் - வரையறு.

17. (a) Any analytic function $f(z) = u + iv$ with $\arg f(z)$ constant is itself a constant function.
 எந்த பகுப்பாய்வு செயல்பாடும் $f(z) = u + iv$ $\arg f(z)$ மாறிலியுடன் ஒரு மாறிலி சமன்பாடு என நிரூபி
- (b) Prove that the functions $f(z)$ and $\overline{f(z)}$ are simultaneously analytic.
 $f(z)$ மற்றும் $\overline{f(z)}$ ஒரே நேரத்தில் பகுப்பாய்வு என நிரூபிக்கவும்
18. If $u + v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ and $f(z) = u + iv$ find the analytical function $f(z)$ in terms of z .
 $u + v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ எனில் $f(z) = u + iv$ பகுப்பாய்வு செயல்பாட்டைக் கண்டறியவும்
19. Find the bilinear transformation which maps the points $z = 1, 1, \infty$ respectively on $w = -i, -1, i$
 $z = 1, 1, \infty$ முறையே $w = -i, -1, i$ எனில் இருமுனை மாற்றத்தைக் கண்டறியவும்

- (b) Evaluate $\int_C \frac{zdz}{z^2-1}$ where C is the positively oriented circle $|z| = 2$

$\int_C \frac{zdz}{z^2-1}$ ஐ மதிப்பிடு C என்பதை நேர்மறை சார்ந்த வட்டம் $|z| = 2$

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. (a) Prove that $|2z - 3z|^{-2} = x^2 + 25y^2$

$|2z - 3z|^{-2} = x^2 + 25y^2$ என்பதை நிரூபிக்கவும்

- (b) Find the cartesian form of the equation

$$|z - 4i|^2 + |z + 4i|^2 = 34$$

$|z - 4i|^2 + |z + 4i|^2 = 34$ சமன்பாட்டின் கார்டீசியன் வடிவத்தைக் கண்டறியவும்

10. Evaluate using Cauchy's integral formula $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^2+5}{z-3} dz$ where C is $|z| = 4$

C என்பது $|z| = 4$, $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^2+5}{z-3} dz$ Cauchy-ன் தொகைக்கெழு சூத்திரத்தை பயன்படுத்தி மதிப்பிடு.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Express each of the following functions in the form $u(x, y) + iv(x, y)$

(i) $w = \frac{1}{2}$ (ii) $w = z\bar{z}$

பின்வரும் ஒவ்வொரு செயல்பாடுகளையும் $u(x, y) + iv(x, y)$ வடிவத்தில் வெளிப்படுத்தவும்

(i) $w = \frac{1}{2}$ (ii) $w = z\bar{z}$

Or

- (b) Evaluate $\lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 - 5z + 10)$

மதிப்பிடுக $\lim_{z \rightarrow 1+i} (z^2 - 5z + 10)$

12. (a) Prove that an analytic function in a region with constant modulus is constant.

நிலையான மாடுலஸ் கொண்ட ஒரு பகுதியில் ஒரு பகுப்பாய்வு செயல்பாடு நிலையானது என நிரூபி

Or

- (b) Test whether the following function is analytic $e^{-x}(\cos y - i \sin y)$

பின்வரம் செயல்பாடு பகுப்பாய்வு உள்ளதா என சோதிக்கவும் $e^{-x}(\cos y - i \sin y)$

13. (a) Prove that $u = \frac{y}{x^2 + y^2}$ is harmonic. Also find a function v such that $f(z) = u + iv$ is analytical and express $f(z)$ in terms of z .

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{ஹார்மோனிக்} \quad \text{என்பதை}$$

நிரூபிக்கவும் மற்றும் பகுப்பாய்வு z இன் அடிப்படையில் வெளிப்படுத்தவும் $f(z) = u + iv$ என்ற v யும் கண்டறியவும்

Or

- (b) Show that $f(z) = iz/2$ in the open disc $|z| < 1$, then $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = i/2$

$f(z) = iz/2$ திறந்து வட்டு $|z| < 1$ எனில் $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = i/2$ என நிறுவுக

14. (a) Find the points where the following mappings are conformal. Also find the critical points if any $w = e^z$

$w = e^z$ இணைக்கமாக இருக்கும் புள்ளிகளைக் கண்டறியவும் மேலும் முக்கியமான புள்ளிகள் இருந்தால் கண்டுபிடிக்கவும்

Or

- (b) Show that by mean of the inversion $w = \frac{1}{z}$ the circle given by $|z - 3| = 5$ is mapped into the circle $\left|w + \frac{3}{16}\right| = \frac{5}{16}$

$w = \frac{1}{z}$ என்ற உருமாற்றத்தில் $|z - 3| = 5$ என்ற வட்டம் $\left|w + \frac{3}{16}\right| = \frac{5}{16}$ வட்டம் என மாறும் என்பதைக் காட்டுங்கள்

15. (a) Evaluate $\int_C f(z) dz$ where $f(z) = y - x - i3x^2$ and C is the line segment from $z = 0$ to $z = 1 + i$

$\int_C f(z) dz$ ஐ மதிப்பீடு செய்யவும் $f(z) = y - x - i3x^2$ C என்பது கோட்டு பகுதி $z = 0$ லிருந்து $z = 1 + i$ முடிய

Or